Colegio España
Concepción 2020
Profesora Karinna Linares Avello
Prof. Integración: Denise Alarcón

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
COLEGIO ESPAÑA - CONCEPCIÓN

Guía de Aprendizaje N°5
Unidad Uno ✔ Números
Segundo Medio

Nombre:	Curso:	Fecha:

Aprendizajes Esperados:
(OA1) Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales.

Importante: No es obligación imprimir esta guía, puedes copiarla y desarrollarla en tu cuaderno, estudiarla desde tu computador o dispositivo móvil. Consultas al correo electrónico karinna@cesp.cl

RACIONALIZACION

Racionalizar una expresión fraccionaria con raíces inexactas en el denominador (números irracionales) consiste en obtener otra expresión fraccionaria equivalente, pero sin que aparezcan raíces en el denominador. Para esto, se amplifica por una expresión tal que se elimine la o las raíces del denominador.

¿Para qué racionalizar?
Una de las razones por las cuales se racionaliza es para realizar la división, ya que el divisor no puede ser un número irracional.
Una de las ventajas de racionalizar expresiones que contienen raíces cuadradas en el denominador es que se pueden aproximar y comparar de manera más sencilla.

CASO 1: Raíz cuadrada en el denominador

Racionalización de expresiones de la forma $\frac{a}{\sqrt{c}}$

Para racionalizar expresiones de esta forma, se debe amplificar por el factor $\sqrt{c}$.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{c}}}=\frac{a}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{c^2}}=\frac{a\sqrt{c}}{c}$$

Ejemplo 1:

$$\frac{\mathbf{20}}{\sqrt{\mathbf{5}}}=\frac{20}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{20\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{2}}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{2\cdot3}=\frac{4\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 4:

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{8}}}=\frac{2}{3\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=\frac{2\sqrt{8}}{3\sqrt{8^2}}=\frac{2\cdot2\sqrt{2}}{3\cdot8}=\frac{4\sqrt{2}}{24}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

Ejemplo 5:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{5}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

Ejemplo 6:

$$\frac{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{6}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{12}}{\sqrt{2^2}}=\frac{4\cdot2\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$$

Ejemplo 7:

$$\frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5}}}=\frac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{15}}{3\sqrt{5^2}}=\frac{7\sqrt{15}}{3\cdot5}=\frac{7\sqrt{15}}{15}$$

Ejemplo 8:

$$\frac{\mathbf{6}\sqrt{\mathbf{18}}}{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}}=\frac{6\sqrt{18}}{5\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{36}}{5\sqrt{2^2}}=\frac{6\cdot6}{5\cdot2}=\frac{36}{10}=\frac{18}{5}$$

Racionalización de expresiones de la forma $\dfrac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{c}}$

Para racionalizar expresiones de esta forma, se debe amplificar por el factor $\sqrt{c}$ y en el numerador se debe realizar una multiplicación término a término.

$$\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}} \pm \sqrt{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\boldsymbol{c}}} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c} \cdot \left(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}\right)}{\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{ac} \pm \sqrt{bc}}{c}$$

Ejemplo 1:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{\mathbf{7}}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{7}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{7})}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{35}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{35}}{5}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{3}} - \sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{8}}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{\sqrt{24} - \sqrt{40}}{\sqrt{8^2}} = \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{10}}{8} = \frac{2\left(\sqrt{6} - \sqrt{10}\right)}{8} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{4}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{5}} + \mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{7}}} = \frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{5} + 3\right)}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{35} + 3\sqrt{7}}{7}$$

Ejemplo 4:

$$\frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{2\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\left(2\sqrt{3} - 4\sqrt{6}\right)}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15} - 4\sqrt{30}}{3\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{15} - 4\sqrt{30}}{3 \cdot 5} = \frac{2\sqrt{15} - 4\sqrt{30}}{15}$$

Ejemplo 5:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{5}} + \sqrt{\mathbf{2}} - \sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{10}}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}\left(\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{50} + \sqrt{20} - \sqrt{30}}{\sqrt{10^2}} = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - \sqrt{30}}{10}$$

Ejemplo 6:

$$\frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{8}} + \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{6}} - \mathbf{2}}{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{5\sqrt{8} + 3\sqrt{6} - 2}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(5\sqrt{8} + 3\sqrt{6} - 2\right)}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{16} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2^2}} = \frac{20 + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{8} = \frac{10 + 3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

E J E R C I C I O S

a) $\frac{10}{\sqrt{6}} =$	d) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{6\sqrt{5}} =$	g) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}+1}{\sqrt{3}} =$
b) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$	e) $\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$	h) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}-3\sqrt{6}}{2\sqrt{7}} =$
c) $\frac{15\sqrt{5}}{2\sqrt{8}} =$	f) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{12}}{\sqrt{2}} =$	i) $\frac{4\sqrt{8}-\sqrt{2}-7}{5\sqrt{10}} =$

CASO 2: Adición o sustracción de raíces cuadradas en el denominador

Racionalización de expresiones de la forma $\dfrac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$

Para racionalizar expresiones de esta forma, se debe amplificar por el factor $\sqrt{b} \mp \sqrt{c}$, en el numerador se debe realizar una multiplicación término a término y en el denominador resolver una suma por diferencia.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}+\sqrt{\boldsymbol{c}}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{b} - a\sqrt{c}}{b-c}$$

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}-\sqrt{\boldsymbol{c}}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a \cdot (\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{b} + a\sqrt{c}}{b-c}$$

Ejemplo 1:

$$\frac{\mathbf{10}}{\sqrt{\mathbf{5}}+\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{10(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{10(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = \frac{10(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2} = 5(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = 5\sqrt{5}-5\sqrt{3}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{5}}-\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{10}+5\sqrt{4}}{5-2} = \frac{5\sqrt{10}+10}{3}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}\sqrt{\mathbf{2}}+\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}+\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{4\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{3}(4\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(4\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{12\sqrt{6}-3\sqrt{15}}{32-5} = \frac{12\sqrt{6}-3\sqrt{15}}{27} = \frac{4\sqrt{6}-\sqrt{15}}{9}$$

Ejemplo 4:

$$\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{10}}-\mathbf{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}-8} \cdot \frac{\sqrt{10}+8}{\sqrt{10}+8} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{10}+8)}{(\sqrt{10})^2-(8)^2} = \frac{\sqrt{20}+8\sqrt{2}}{10-64} = \frac{2\sqrt{5}+8\sqrt{2}}{-54} = \frac{-\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{27}$$

Ejemplo 5:

$$\frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{6}}+\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{3}}} = \frac{5\sqrt{7}}{3\sqrt{6}+8\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{6}-8\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-8\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{7}(3\sqrt{6}-8\sqrt{3})}{(3\sqrt{6})^2-(8\sqrt{3})^2} = \frac{15\sqrt{42}-40\sqrt{21}}{54-192} = \frac{-15\sqrt{42}+40\sqrt{21}}{138}$$

Racionalización de expresiones de la forma $\dfrac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{c} \pm \sqrt{d}}$

Para racionalizar expresiones de esta forma, se debe amplificar por el factor $\sqrt{c} \mp \sqrt{d}$, en el numerador se debe realizar una multiplicación término a término y en el denominador resolver una suma por diferencia.

$$\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}} \pm \sqrt{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\boldsymbol{c}}+\sqrt{\boldsymbol{d}}} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} \cdot \frac{\sqrt{c}-\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})}{(\sqrt{c})^2-(\sqrt{d})^2} = \frac{\sqrt{ac}-\sqrt{ad} \pm \sqrt{bc} \pm \sqrt{bd}}{c-d}$$

$$\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}} \pm \sqrt{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\boldsymbol{c}}-\sqrt{\boldsymbol{d}}} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} \cdot \frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}} = \frac{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})}{(\sqrt{c})^2-(\sqrt{d})^2} = \frac{\sqrt{ac}+\sqrt{ad} \pm \sqrt{bc} \pm \sqrt{bd}}{c-d}$$

Ejemplo 1:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}+\sqrt{30}-\sqrt{10}}{6-2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{30}-\sqrt{10}}{4}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{5\sqrt{2}+5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{2}+5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}=\frac{(5\sqrt{2}+5)(\sqrt{10}+\sqrt{5})}{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{5\sqrt{20}+5\sqrt{10}+5\sqrt{10}+5\sqrt{5}}{10-5}=3\sqrt{5}+2\sqrt{10}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+5\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-5\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(5\sqrt{3})^2}=\frac{12-\sqrt{6}-45}{9\cdot 2-25\cdot 3}=\frac{33+\sqrt{6}}{57}$$

Ejemplo 4:

$$\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{5}+5\sqrt{2})^2}{(3\sqrt{5})^2-(5\sqrt{2})^2}=\frac{45+30\sqrt{10}+50}{45-50}=\frac{95+30\sqrt{10}}{-5}=-19-6\sqrt{10}$$

Ejemplo 5:

$$\frac{2\sqrt{6}-7\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+7\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}-7\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+7\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{6}-7\sqrt{3}}{2\sqrt{6}-7\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{6}-7\sqrt{3})^2}{(2\sqrt{6})^2-(7\sqrt{3})^2}=\frac{24-28\sqrt{18}+147}{24-147}=\frac{171-84\sqrt{2}}{-123}=\frac{-57+28\sqrt{2}}{41}$$

EJERCICIOS

a) $\frac{7}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=$	e) $\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{5}+6\sqrt{2}}=$	i) $\frac{8\sqrt{2}+4\sqrt{3}}{8\sqrt{2}-4\sqrt{3}}=$
b) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=$	f) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=$	j) $\frac{5\sqrt{2}-6\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+6\sqrt{5}}=$
c) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}+3\sqrt{7}}=$	g) $\frac{2\sqrt{2}+9}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}=$	k) $\frac{9\sqrt{3}-4}{\sqrt{18}-\sqrt{3}}=$
d) $\frac{\sqrt{6}}{7-\sqrt{5}}=$	h) $\frac{4\sqrt{7}+2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+3\sqrt{6}}=$	l) $\frac{-2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}-2\sqrt{6}}=$

Para complementar: Escanea los siguientes códigos QR desde tu dispositivo móvil o haz click en los links respectivos.

Racionalización I. Caso 1: Raíz cuadrada en el denominador
https://www.youtube.com/watch?v=ePEP2WCikEw

Racionalización II. Caso 2. Adición o Sustracción de raíces cuadradas inexactas en el denominador.
https://www.youtube.com/watch?v=Oyx9CqIV98s